Cours : fiche n°3 - Géométrie plane et trigonométrie

Thème : opérations sur les vecteurs, produit scalaire et calcul trigonométrique.

1. Rappels

1.1. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre l'origine d'un repère orthonormé et de rayon 1.

Son équation cartésienne est :

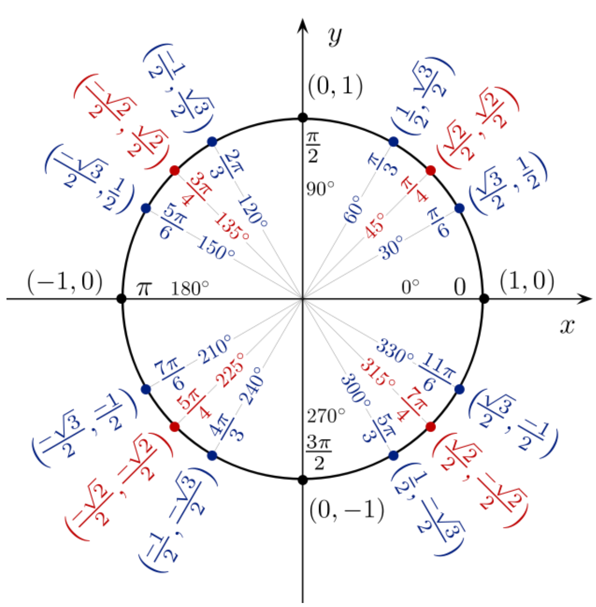
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Le cercle trigonométrique est ainsi l'ensemble des points (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 1$. Les quantités x et y sont ici le cosinus et le sinus de l'angle figurant sur le cercle.

Pour un angle donné :

- Le cosinus figure sur l'axe des abscisses.
- Le sinus figure sur l'axe des ordonnées.

Il s'agit là d'une définition possible mais non rigoureuse des fonctions sinus et cosinus. Les définitions rigoureuses de ces fonctions seront le cas échéant étudiées dans le supérieur. Il est important néanmoins d'avoir cette représentation en tête !



De cette définition, on tire immédiatement la propriété suivante (théorème de Pythagore) :

Pour tout angle x réel, on a : $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$
On utilisera aussi la notation $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

De par la propriété précédente, l'on pourra toujours exprimer un sinus en fonction d'un cosinus et réciproquement. En effet, pour tout angle x réel :

$cos(x) = \sqrt{1 - sin(x)^2}$	$sin(x) = \sqrt{1 - cos(x)^2}$

1.2. Mesure d'angle et angle orienté

Comme vous le savez, on utilise communément deux « unités » pour mesurer la valeur d'un angle : le degré et le radian.

Remarque ! On a mis ici des guillemets autour de « unités » car il faut bien comprendre qu'un angle n'est qu'une quantité et n'a donc pas de dimension. Un angle n'est qu'une quantité représentant une rotation autour d'un point.

Pour exprimer une rotation autour d'un point, on se donne en fait un multiplicateur commun à tout angle. On peut effectuer une rotation complète ou partielle : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc.

En degré, on opte pour 360. Ainsi, on décide plus ou moins arbitrairement qu'il faut 360° pour effectuer un tour complet sur soi-même. Il faudra donc 180° pour effectuer un demi-tour, 120° pour effectuer un tiers de tour ou encore 90° pour effectuer un quart de tour.

En radian, on opte pour le dénominateur 2π ce qui est assez naturel finalement quand on sait que le périmètre du cercle trigonométrique vaut exactement 2π. Dès lors, il faut $2\pi\ rad$ pour effectuer un tour complet sur soi-même, $\pi\ rad$ pour effectuer un demi-tour, $\frac{2\pi}{3}\ rad$ pour effectuer un tiers de tour ou encore $\frac{\pi}{2}\ rad$ pour effectuer un quart de tour.

Autrement dit, si on effectue une rotation de $\frac{1}{k}$ tours (avec k un réel quelconque) :

On effectue une rotation de $\frac{360}{k}$ degré(s)	On effectue une rotation de $\frac{2\pi}{k}$ radian(s)

Inversement, si on effectue une rotation respectivement de x degré(s) ou y radian(s) :

On effectue exactement $\frac{x}{360}$ tour(s)	On effectue exactement $\frac{y}{2\pi}$ tour(s).
x degré(s) valent donc $\frac{x}{360} \times 2\pi$ radian(s).	y radian(s) valent donc $\frac{y}{2\pi} \times 360$ degré(s).

Nous introduisons à présent la notion de « sens de rotation » :

Un angle est typiquement compté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et négativement dans le sens des aiguilles d'une montre. On parle de sens trigonométrique.

Par ailleurs, il est équivalent de faire 1, 2, 3 voir n tours entiers autours de soi-même. Plus généralement :

Soit x un angle exprimé en degrés et y un angle exprimé en radians. Soit k un nombre entier. Alors :

- $x\ degrés = x + 360k\ degrés$
- $y\ rad = y + 2\pi k\ rad$

<u>Exemple</u> : exemples d'angles équivalents

En degrés, on a par exemple : $60° = 420° = -300° = 780° = -660°$.

En radians, on a par exemple : $\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = \frac{-5\pi}{3} = \frac{13\pi}{3} = \frac{-11\pi}{3}$.

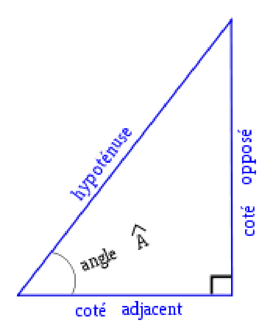
<u>Exemple</u> : exemple de conversions

Passage de degrés à radians : $60° = \frac{60}{360} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}\ rad$.

Passage de radians à degrés : $\frac{\pi}{3} rad = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \times 360 = 60°$.

1.3. Sinus, cosinus et tangente

On rappelle ici la définition des fonctions sinus, cosinus et tangente que l'on apprend au collège. On pourra bien entendu garder en tête cette représentation triviale. Une fois encore, il ne s'agit pas de la définition formelle de ces fonctions. Néanmoins, cette représentation peut s'avérer pratique.

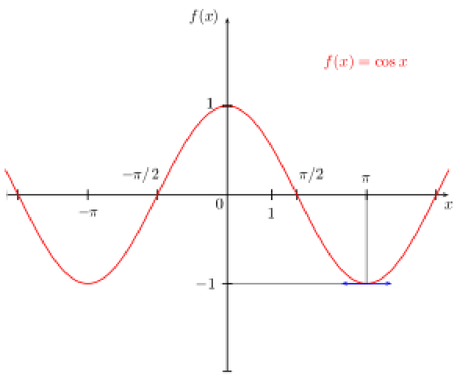
$sin\,\hat{A} = \frac{Côté\ opposé}{Hypoténuse}$	
$cos\,\hat{A} = \frac{Côté\ adjacent}{Hypoténuse}$	
$tan\,\hat{A} = \frac{sin\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}} = \frac{Côté\ opposé}{Côté\ adjacent}$	

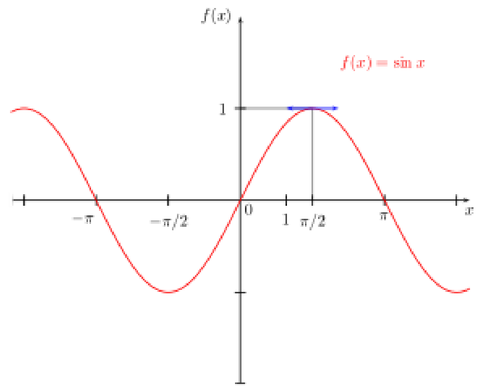
On remarquera que le cercle trigonométrique correspond au cas où on a $Hypoténuse = 1$. Dans ce cas, on a par construction : $sin\hat{A} = Côté\ opposé$ et $cos\hat{A} = Côté\ adjacent$.

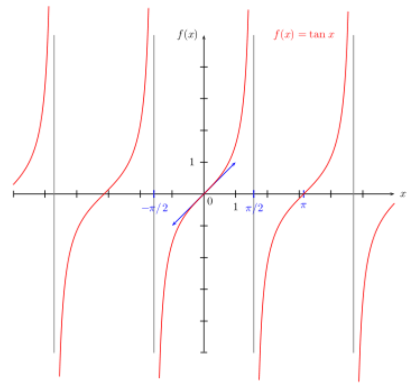
2. Trigonométrie

2.1. Représentation

Les fonctions trigonométriques $sin(x)$, $cos(x)$ et $tan(x)$ sont également appelées fonctions circulaires. S'il est commode de visualiser leurs valeurs usuelles au moyen du cercle trigonométrique (*voir 1.1. Cercle trigonométrique*), on peut encore et surtout les représenter dans le plan euclidien :







Ces représentations sont équivalentes à celles obtenues à partir du cercle trigonométrique :

- Sur le cercle trigonométrique, on représente l'ensemble des point M$(cos(x), sin(x))$ où x représente l'angle.
- Dans le plan euclidien, on représente respectivement les points M$(x, cos(x))$, M$(x, sin(x))$ ou M$(x, tan(x))$, où x représente l'angle.

> **Conseil !** il convient de garder en tête les différentes représentations des fonctions circulaires, en particulier leur représentation dans le plan et leur construction au moyen du cercle trigonométrique. Si l'on a bien en mémoire ces représentations, l'on retrouvera normalement facilement les propriétés énumérées ci-après.

De ces représentations dans le plan, on tire les propriétés suivantes :

Propriété de $cos(x)$	Formule
La fonction $cos(x)$ est définie pour tout x réel.	*Ensemble de définition* $\mathbb{R}$
La fonction $cos(x)$ est paire, c'est-à-dire symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	*Parité* $cos(x) = cos(-x)$
La fonction $cos(x)$ est 2π-périodique, c'est-à-dire périodique de période 2π.	*Périodicité* $cos(x) = cos(x + 2\pi)$
Si on déphase (≈ translate) la fonction $cos(x)$ de $\pi/2$, on obtient la fonction $sin(x)$.	*Déphasage* $cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Propriété de $sin(x)$	Formule
La fonction $sin(x)$ est définie pour tout x réel.	*Ensemble de définition* $\mathbb{R}$
La fonction $sin(x)$ est impaire, c'est-à-dire symétrique par rapport à l'origine.	*Imparité* $sin(x) = -sin(-x)$
La fonction $sin(x)$ est 2π-périodique, c'est-à-dire périodique de période 2π.	*Périodicité* $sin(x) = sin(x + 2\pi)$
Si on déphase (≈ translate) la fonction $sin(x)$ de $-\pi/2$, on obtient la fonction $cos(x)$.	*Déphasage* $sin(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Propriété de $tan(x)$	Formule
On rappelle que $tan(x)$ est défini comme le quotient de $sin(x)$ par $cos(x)$.	*Définition* $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$
La fonction $tan(x)$ n'est pas définie pour les x valant $\pi/2 + k\pi$ avec un entier quelconque (dont $-\pi/2$ et $\pi/2$). *Justification : $tan(x)$ est un quotient réel. Son dénominateur ne soit donc pas être nul. On doit donc avoir $cos(x) \neq 0$.*	*Ensemble de définition* $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
La fonction $tan(x)$ est impaire, c'est-à-dire symétrique par rapport à l'origine.	*Imparité* $tan(x) = -tan(-x)$
La fonction $sin(x)$ est π-périodique, c'est-à-dire périodique de période π.	*Périodicité* $tan(x) = tan(x + \pi)$
La fonction $tan(x)$ étant périodique, on peut se contenter de l'étudier pour $-\pi/2 < x < \pi/2$.	*Restriction* $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

2.2. Variations et limites

Quant aux variations, la représentation des fonctions circulaires dans le plan euclidien nous permet encore de visualiser les propriétés suivantes :

Fonction	Propriétés
$cos(x)$	La fonction $cos(x)$ est strictement : • Croissante sur tout intervalle $[-\pi + 2k\pi ; 0 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{N}$. • Décroissante sur tout intervalle $[0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{N}$.
$sin(x)$	La fonction $sin(x)$ est strictement : • Croissante sur tout intervalle $[-\pi/2 + 2k\pi; \pi/2 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{N}$. • Décroissante sur tout intervalle $[\pi/2 + 2k\pi; 3\pi/2 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{N}$.
$tan(x)$	La fonction $tan(x)$ est strictement croissante sur $]-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi[$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Quant aux limites, on notera que les fonctions $cos(x)$ et $sin(x)$ et $tan(x)$ sont continues sur leur ensemble de définition respectif.

2.3. Propriétés

On retient tout d'abord bien que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{cos^2(x) + sin^2(y) = 1}$

Ce qui nous permet d'écrire : $\boxed{cos(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)}}$ et $\boxed{sin(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)}}$

Ensuite, on note encore quelques relations remarquables sur les fonctions trigonométriques, formules qu'on qualifient d'identités trigonométriques. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$

(ii) $sin(x + y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$

(iii) $tan(x + y) = \dfrac{tan(x) + tan(y)}{1 - tan(x)tan(y)}$

Preuves : on part du principe que les nombres complexes ont été étudiés (voir cours sur les nombres complexes ou relire la démonstration ultérieurement dans le cas contraire).

(i) et **(ii)** On utilise les notations trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

$$\underbrace{cos(x+y)}_{p.\ réelle} + i\ \underbrace{sin(x+y)}_{p\ .imaginaire} = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (cos(x) + isin(x)) \times (cos(y) + isin(y))$$

En développant, il vient :

$$\underbrace{cos(x+y)}_{p.\ réelle} + i\ \underbrace{sin(x+y)}_{p.\ imaginaire} = cos(x)cos(y) + icos(x)sin(y) + isin(x)\cos(y) - sin(x)\sin(y)$$

$$\underbrace{cos(x+y)}_{p.\ réelle} + i\ \underbrace{sin(x+y)}_{p.\ imaginaire} = \underbrace{cos(x)cos(y) - sin(x)\sin(y)}_{partie\ réelle} + i\ \underbrace{(cos(x)sin(y) + sin(x)\cos(y))}_{partie\ imaginaire}$$

(iii) On utilise tout bonnement la définition de $tan(x + y)$ comme quotient et des formules (i) et (ii).

$$tan(x+y) = \frac{sin(x+y)}{cos(x+y)} = \frac{sin(x)cos(y)+cos(x)sin(y)}{cos(x)cos(y)-sin(x)\sin(y)}$$

Si on factorise par $1/cos(x)cos(y)$, la magie s'opère :

$$tan(x+y) = \frac{(sin(x)cos(y)+cos(x)sin(y))\times\frac{1}{cos(x)cos(y)}}{(cos(x)cos(y)-sin(x)sin(y))\times\frac{1}{cos(x)cos(y)}} = \frac{\frac{sin(x)}{cos(x)}+\frac{sin(y)}{cos(y)}}{1-\frac{sin(x)}{cos(x)}\times\frac{sin(y)}{cos(y)}} = \frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}$$

Une fois ces propriétés retenues et admises, on peut construire et démontrer d'autres identités qui s'avèrent souvent très utiles. En voici quelques-unes :

(i) $cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$	**(ii)** $sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$	**(iii)** $tan^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{1+cos(2x)}$

(iv) $cos(x) + cos(y) = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	**(v)** $sin(x) + sin(y) = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Preuve :

(i) $A = \frac{1+cos(2x)}{2} = \frac{1+cos(x+x)}{2} = \frac{1+cos(x)cos(x)-sin(x)sin(x)}{2} = \frac{1+cos^2(x)-sin^2(x)}{2}$

$A = \frac{1+cos^2(x)-(1-cos^2(x))}{2} = \frac{2cos^2(x)}{2} = cos^2(x)$

On peut, à titre d'exercice, montrer la propriété (ii) de la même manière.

(iii) On la déduit immédiatement de (i) et (ii).

(iv) $A = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)$

On développe :

$A = 2\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right) - sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{y}{2}\right)\right)\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(-\frac{y}{2}\right) - sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(-\frac{y}{2}\right)\right)$

Puis par parité de cosinus et imparité de sinus :

$A = 2\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right) - sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{y}{2}\right)\right)\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{y}{2}\right)\right)$

On développe :

$A = 2\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right)cos^2\left(\frac{y}{2}\right) + cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{y}{2}\right) - sin\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(\frac{y}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{y}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right)sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)$

On simplifie puis on utilise les formules (i) et (ii) :

$A = 2\left(cos^2\left(\frac{x}{2}\right)cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right)sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{1+cos(x)}{2}\times\frac{1+cos(y)}{2} - \frac{1-cos(x)}{2}\times\frac{1-cos(y)}{2}\right)$

$A = \frac{1}{2}\times\left[(1+cos(x))(1+cos(y)) - (1-cos(x))(1-cos(y))\right]$

$A = \frac{1}{2}\times\left[(1+cos(y)+cos(x)+cos(x)cos(y)) - (1-cos(y)-cos(x)+cos(x)cos(y))\right]$

Soit après simplification :

$A = \frac{1}{2}\times[2cos(y)+2cos(x)] = cos(y)+cos(x)$

On peut, à titre d'exercice, montrer la propriété (v) de la même manière.

Remarques ! Les propriétés (i), (ii) et (iii) présentée ci-avant sont particulièrement utiles ! En effet, il n'est guère pratique d'étudier une fonction contenant des termes de la forme $cos^n(x)$, $sin^n(x)$ ou encore $tan^n(x)$. Grâce à ces propriétés et à leur démonstration, on peut faire « tomber » la puissance n et ainsi obtenir plutôt des termes de la forme $cos^k(x)$, $sin^k(x)$ et $tan^k(x)$ avec $0 < k \leq n$. La fonction peut dès lors être étudiée bien plus facilement. Les procédés de ce genre sont qualifiés de linéarisation. Les formules d'Euler présentées ci-après permettent également de linéariser des puissances de cos, sin et tan.

Si les nombres complexes n'ont pas encore été étudiés, on peut revenir ultérieurement sur les propriétés présentées ci-dessous.

Il existe en fait un lien étroit entre les fonctions circulaire (dont $cos(x)$, $sin(x)$ et $tan(x)$) et l'exponentielle complexe (e^{ix}). Par simple calcul, on peut en effet démontrer les propriétés suivantes :

Formules d'Euler		
$cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$	$sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$	$cos(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$

L'exponentielle complexe e^{ix} nous permet encore d'obtenir cette formule bien utile :

Formules de Moivre
$\left(cos(x) + isin(x)\right)^n = cos(nx) + isin(nx)$

Preuve : $\left(cos(x) + isin(x)\right)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = cos(nx) + isin(nx)$

2.4. Dérivation

Les fonctions sinus et cosinus étant continues sur $\mathbb{R}$, on s'attend naturellement à ce qu'elles soient dérivables sur $\mathbb{R}$. On s'attend plutôt à ce que la fonction tangente soit dérivable sur $]-\pi/2; \pi/2[$. Ce qui est bien le cas :

Dérivée de $sin(x)$	Dérivée de $cos(x)$	Dérivée de $tan(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$: $sin'(x) = cos(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}$: $cos'(x) = -sin(x)$	$\forall x \in]-\pi/2; \pi/2[$: $tan'(x) = 1 + tan^2(x)$ $= 1 / cos^2(x)$

Preuve : comme très souvent dans ce cas, on en revient à la définition du nombre dérivé.

$$sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)\sin(h) + sin(x)cos(h) - sin(x)}{h}$$

Or : $\lim_{h \to 0} cos(h) = 1$.

D'où : $sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)\sin(h) + sin(x) - sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)\sin(h)}{h}$

Par ailleurs, on admet et on retient que : $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1}$

Finalement : $\boldsymbol{sin'(x) = \lim_{h \to 0} cos(x) = cos(x)}$

$$cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x)\cos(h) - sin(x)sin(h) - cos(x)}{h}$$

$$cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{cos(x) - sin(x)sin(h) - cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} - \frac{sin(x)sin(h)}{h}$$

Finalement : $\boldsymbol{cos'(x) = \lim_{h \to 0} -sin(x) = -sin(x)}$

Quant à $tan'(x)$, il suffit de se rappeler que $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$ et calculer la dérivée du quotient :

$$tan'(x) = \frac{sin'(x)\cos(x) - sin(x)cos'(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos^2(x)}}$$

Qui plus est : $\frac{1}{cos^2(x)} = \frac{sin^2(x)+cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = \boldsymbol{1 + tan^2(x)}$

Exemple : à titre d'exemple, en se rappelant le théorème de dérivation des fonctions composées, c'est-à-dire $(u \circ v)'(x) = v'(x)u'\big(v(x)\big)$, amusons-nous un peu.

- On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Calculons la dérivée de $sin\big(u(x)\big)$: $\boldsymbol{(sin \circ u)'(x) = u'(x)sin'\big(u(x)\big) = u'(x)cos\big(u(x)\big)}$.
- Pareillement, on trouve $\boldsymbol{(cos \circ u)'(x) = -u'(x)sin\big(u(x)\big)}$.
- Ainsi, la dérivée de $cos(x^2+1)$ est $-2xsin(x^2+1)$.
- Pareillement, la dérivée de $sin(x^3+2)$ est $3x^2cos(x^3+2)$.

3. Vecteurs et opérations

3.1. Définition

La première façon de se visualiser un vecteur est de le voir comme une flèche positionnée dans le plan euclidien (qu'on peut appeler $\mathbb{R}^2$) voire dans l'espace euclidien à 3 dimensions (qu'on peut appeler $\mathbb{R}^3$). Un vecteur est alors une flèche, c'est-à-dire un segment orienté, dans le plan par exemple, qui va d'un point $A(x_a; y_a)$ à un point $B(x_b; y_b)$.

On note alors ce vecteur $\overrightarrow{AB}$, dont les coordonnées sont $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on obtient $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a; z_b - z_a)$. On peut même travailler dans des espaces plus grand $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque voire dans des espaces bien plus abstraits. En terminale, on se cantonne aux espaces $\mathbb{R}$ (droite des réelles), $\mathbb{R}^2$ (plan euclidien) et $\mathbb{R}^3$ (espace euclidien à 3 dimensions).

Définition
Un vecteur $\vec{v}$ du plan $\mathbb{R}^2$ est défini par ses coordonnées $\vec{v}(x; y)$ et un vecteur $\vec{v}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ par ses coordonnées $\vec{v}(x; y; z)$. *Plus généralement, un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ est défini par ses coordonnées $\vec{v}(x_1; \dots; x_n)$.*

Un vecteur étant un segment orienté, il a une longueur, qu'on peut typiquement calculer à l'aide du théorème de Pythagore :

Définition
On appelle norme de $\vec{v}$, notée $\\|\vec{v}\\|$, la longueur du vecteur $\vec{v}$. Cette norme est appelée norme 2 ou encore norme euclidienne*. On a $\\|\vec{v}\\| = \sqrt{x^2+y^2}$ dans $\mathbb{R}^2$ ou encore $\\|\vec{v}\\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dans $\mathbb{R}^3$. *Cette norme est appelée norme 2 ou encore norme euclidienne. En effet, dans le supérieur, on se permettra d'utiliser d'autres normes et modes de calcul de distances.* *Plus généralement* $\\|\vec{v}\\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$
Soit $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$ points de $\mathbb{R}^2$, alors $\\|\overrightarrow{AB}\\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$
Soit $A(x_a; y_a; z_a)$ et $B(x_b; y_b; z_b)$ points de $\mathbb{R}^3$, alors $\\|\overrightarrow{AB}\\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$

3.2. Opérations

Pour qu'on parle réellement de vecteur, il faut en fait également définir deux opérations élémentaires. Ceci qui permet de définir, ce qu'on appelle, de manière très générale, un espace vectoriel.

Définition	Enoncé
Addition	Soit deux vecteurs $\vec{a}(a_1; \ldots; a_n)$ et $\vec{b}(b_1; \ldots; b_n)$. On définit l'addition de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, notée $\vec{a}+\vec{b}$, par $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(a_1+b_1; \ldots; a_n+b_n)$
Multiplication par un scalaire	Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit un vecteur $\vec{a}(a_1; \ldots; a_n)$. On définition la multiplication de k par $\vec{a}$, notée $k \times \vec{a}$ ou plus simplement $k\vec{a}$, par $k \times \vec{a} = \vec{a}(ka_1; \ldots; ka_n)$

Exemple : soit $A(3\,;\,5)$ et $B(5\,;8)$, $C(10\,;12)$ deux points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. En déduire que $\left\|\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = (5-3; 8-5) + (10-5; 12-8) = (2;3)+(5;4) = (2+5; 3+4) = (\mathbf{7};\mathbf{7})$.
$\overrightarrow{AC} = (10-3; 12-5) = (\mathbf{7};\mathbf{7})$.
D'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\left\|\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\frac{1}{7}(7;7)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{7}\times 7; \frac{1}{7}\times 7\right)\right\| = \|(1;1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$

3.3. Propriétés

Des deux opérations ci-avant définies, on déduit un certain nombre de propriétés élémentaires, communes à tous les espaces vectorielles.

Propriété	Enoncé
(i) Elément neutre	Soit $\vec{a}(a_1; \ldots; a_n)$ un vecteur quelconque. On note $\vec{0}(0; \ldots; 0)$ ce qu'on appelle le vecteur nul (dont toutes les coordonnées valent 0). On a toujours : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
(ii) Linéarité	Soient $\vec{a}(a_1\,; \ldots\,; a_n)$ et $\vec{b}(b_1\,; \ldots\,; b_n)$ deux vecteurs quelconques et soit $k \in \mathbb{R}$ alors $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$
(iii) Commutativité	Comme on travail avec des réels, on a également la propriété suivante. Soient $\vec{a}(a_1; \ldots; a_n)$ et $\vec{b}(b_1; \ldots; b_n)$ deux vecteurs quelconques, on a $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
(iv) Opposé	Tout vecteur $\vec{a}(a_1; \ldots; a_n)$ possède un symétrique $\vec{b}$, encore appelé opposé, tel que $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$. Cet opposé est $\vec{b}=-\vec{a}=(-a_1; \ldots; -a_n)$

(v) Opposé (avec des points)	Soient $A(a_1; \dots; a_n)$ et $B(b_1; \dots; b_n)$ deux points. L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$ et on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
(vi) Relation de Chasles	Soient $A(a_1; \dots; a_n)$, $B(b_1; \dots; b_n)$ et $C(c_1; \dots; c_n)$ trois points. On a la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Preuves :

(i) $\vec{a} + \vec{0} = (a_1; \dots; a_n) + (0; \dots; 0) = (a_1 + 0; \dots; a_n + 0) = (a_1; \dots; a_n) = \vec{a}$
(ii) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k((a_1 ; \dots ; a_n) + (b_1 ; \dots ; b_n)) = k(a_1 + b_1 ; \dots ; a_n + b_n) = (ka_1 + kb_1; \dots ; ka_n + kb_n)$
$k\vec{a} + k\vec{b} = k(a_1 ; \dots ; a_n) + k(b_1 ; \dots ; b_n) = (ka_1; \dots ; ka_n) + (kb_1; \dots ; kb_n) = (ka_1 + kb_1; \dots ; ka_n + kb_n)$
(iii) $(a_1; \dots; a_n) + (-a_1; \dots; -a_n) = (a_1 - a_1; \dots; a_n - a_n) = (0; \dots; 0) = \vec{0}$
(iv) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 ; \dots ; a_n) + (b_1 ; \dots ; b_n) = (a_1 + b_1 ; \dots ; a_n + b_n) = (b_1 + a_1 ; \dots ; b_n + a_n) = \vec{b} + \vec{a}$
(v) $-\overrightarrow{AB} = -(b_1 - a_1 ; \dots ; b_n - a_n) = (-(b_1 - a_1) ; \dots ; -(b_n - a_n)) = (a_1 - b_1 ; \dots ; a_n - b_n) = \overrightarrow{BA}$
(vi) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b_1 - a_1 ; \dots ; b_n - a_n) + (c_1 - b_1 ; \dots ; c_n - b_n)$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b_1 - a_1 + c_1 - b_1 ; \dots ; b_n - a_n + c_n - b_n) = (c_1 - a_1 ; \dots ; c_n - a_n) = \overrightarrow{AC}$

4. Orthogonalité et colinéarité

4.1. Produit scalaire

Rappel
On appelle angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ l'angle formé par les segments $[AB]$ et $[CD]$ mis bout-à-bout de tel sorte que A et C soient confondus. L'angle est compté positivement dans le sens trigonométrique (sens antihoraire) et négativement dans le sens inverse (sens horaire).

Sur l'espace vectorielle $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou plus généralement $\mathbb{R}^n$, on définit une opération un peu particulière qu'on appelle le produit scalaire. Il s'agit d'une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une opération entre de vecteur (de $\mathbb{R}^n$) dont le résultat est un réel (dans $\mathbb{R}$).

Définition
On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ (par exemple $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), noté $\langle \vec{u} \vert \vec{v} \rangle$ ou encore $\vec{u}.\vec{v}$, l'opération $\langle \vec{u} \vert \vec{v} \rangle = \vec{u}.\vec{v} = \Vert\vec{u}\Vert \Vert\vec{v}\Vert cos(\vec{u}, \vec{v})$.

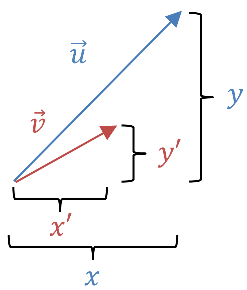
De cette définition, on tire immédiatement les propriétés suivantes :

Propriétés
Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (angle droit) avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a toujours $cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ et donc $\Vert\vec{u}\Vert \Vert\vec{v}\Vert cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$.
Si $(\vec{u}, \vec{v}) = k\pi$ (angle plat) avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \Vert\vec{u}\Vert \Vert\vec{v}\Vert$. En particulier $\vec{u}.\vec{u} = \Vert\vec{u}\Vert^2$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a toujours $cos(k\pi) = \pm 1$ et donc $\Vert\vec{u}\Vert \Vert\vec{v}\Vert cos(k\pi) = \Vert\vec{u}\Vert \Vert\vec{v}\Vert$.

Si l'on connaît les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dispose d'une définition du produit scalaire, équivalente à la précédente, qui permet de calculer très simplement le produit scalaire :

Calcul
Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
Soient $\vec{u}(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ et $\vec{v}(x'_1;x'_2;\ldots;x'_n)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors : $$\vec{u}.\vec{v} = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \cdots + x_nx'_n = \sum_{i=1}^{n} x_ix'_i$$

Preuve : prouvons le cas où $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.



En se plaçant dans le repère $\mathcal{R}(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et en notant $\theta = (\vec{\imath},\vec{u}), \theta' = (\vec{\imath},\vec{v})$, on a :

- $x = \|\vec{u}\|cos(\theta)$
- $x' = \|\vec{v}\|cos(\theta')$
- $y = \|\vec{u}\|sin(\theta)$
- $y' = \|\vec{v}\|sin(\theta')$
- $(\vec{u},\vec{v}) = \theta - \theta'$

Avec :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$

Il vient que :

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= \|\vec{u}\|cos(\theta)\|\vec{v}\|cos(\theta') + \|\vec{u}\|sin(\theta)\|\vec{v}\|sin(\theta') \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\big(cos(\theta)cos(\theta') + sin(\theta)sin(\theta')\big) \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(\theta - \theta') \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|cos(\vec{u},\vec{v}) \end{aligned}$$

Exemple : le produit scalaire de $\vec{u}(1;-1)$ et $\vec{v}(2;2)$ est $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 2 + (-1) \times 2 = 2 - 2 = 0$. On en déduit que $(\vec{u},\vec{v})$ est un angle droit, en l'occurrence $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.

De la définition précédente du produit scalaire, on déduit aisément les deux propriétés suivantes que je vous invite à démontrer :

Propriété	Enoncé
(i) Symétrie	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
(ii) Bilinéarité	Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et soit $k \in \mathbb{R}$, alors : $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}).\vec{u} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ $k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

Maintenant que nous avons défini ce qu'est le produit scalaire, nous pouvons nous préoccuper de son utilité.

4.2. Orthogonalité et colinéarité

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls :

Rappels
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$, noté $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2}$ (à $k\pi$ près). Alors, on a bien entendu $(AB) \perp (CD)$.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$, noté $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \pi$ (à $k\pi$ près). Alors, on a bien entendu $(AB) \parallel (CD)$. *N.B. : si $A = D$, alors on a $(AB) \parallel (AC)$. Les droites (AB) et (AC) sont donc confondues et les points A, B et C sont alignés.*

On a dès lors les propriétés suivantes :

Propriétés
(i) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \overrightarrow{AB} \vert \overrightarrow{CD} \rangle = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$
(ii) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Preuve :

(i) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\| sin\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 0$. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$, alors :
$\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\| sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow sin\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \pi + k\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\| sin\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\|$. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$, alors : $\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{CD}\| sin\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow sin\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Remarques ! Les deux propriétés qui précèdent sont très pratiques :

- Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires (orthogonales), il faut et il suffit de prendre deux points A et B de la première droite ainsi que deux points C et D de la seconde et vérifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
- Pour montrer que deux droites sont parallèles, il faut et il suffit cette fois-ci de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, i.e. $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il faut et il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples :

- Soient un triangle ABC. Soit deux points M et N tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$. Montrer que $(MN) \parallel (BC)$ si et seulement si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Il s'agit donc de prouver le théorème de Thalès. On doit donc montrer que l'égalité ci-dessus implique

que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Inversement, on doit montrer que si $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, alors l'égalité ci-dessus est vérifiée.

Par hypothèses, les points A, B et M sont colinéaires et il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Les points A, C et N sont pareillement alignés et il existe donc $k' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AN} = k'\overrightarrow{AC}$.

Dire que $(MN) \parallel (BC)$ revient à dire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaire et donc qu'il existe $k'' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MN} = k''\overrightarrow{BC}$.

Ce qui revient donc à dire, d'après la relation de Chasles, que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AB} + k''\overrightarrow{BC}$, d'une part. D'autre part, cela revient à dire que $\overrightarrow{AN} = k'\overrightarrow{AC} = k'\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = k'\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{BC}$.
Dès lors, on a $k'\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AB} + k''\overrightarrow{BC}$ ce qui équivaut à $k = k' = k''$.

Dire que $(MN) \parallel (BC)$ revient finalement à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$, soit encore $\frac{\|\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AN}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\|\overrightarrow{MN}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = k$.

- Soit un cercle $(\mathcal{C})$ quelconque de centre O et de rayon r. Soit AB un diamètre du cercle. Soit $C \in (\mathcal{C})$ un point quelconque distinct de A et de B. Montrons que le triangle ABC est rectangle en C :

On se place dans le repère $\mathcal{R}\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. Dès lors, les coordonnées de O, A et B sont $O(0\,;0)$, $A(1\,;0)$, $B(-1;0)$.
On a alors $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = r = 1$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = 2r = 2$.
On note $C(x;y)$ les coordonnées de C dans le repère. Comme $C \in (\mathcal{C})$, on a $\|\overrightarrow{OC}\| = r = 1$, soit encore $\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (1-x;-y).(-(1+x);-y) = -(1-x)(1+x) + (-y)(-y) = x^2 + y^2 - 1$
Or $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$
D'où $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = x^2 + y^2 - 1 = 1 - 1 = 0$.

En conséquence, on a bien $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ et le triangle ABC est rectangle en C.

5. Vecteurs et propriétés

Nous nous intéressons à quelques propriétés très intéressante et d'usage courant, quoique celles-ci n'atterrissent dans les programmes de mathématiques qu'après la terminale.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne précédemment définie, alors :

Propriété	Enonce
(i) Loi des cosinus (ou Théorème d'Al-Kashi)	$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ En particulier, $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (théorème de Pythagore) si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{v}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

(ii) Inégalité de Cauchy-Schwarz	$\lvert\vec{u}.\vec{v}\rvert \leq \lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert$
(iii) Inégalité triangulaire	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert \leq \lVert\vec{u}\rVert + \lVert\vec{v}\rVert$

Preuve :

(i) On se donne deux vecteurs $\vec{u}(x_1; \dots; x_n)$ et $\vec{v}(y_1; \dots; y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, i.e. $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_2^2}$. On vérifie bien que :

$$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = \lVert(x_1 + \cdots + y_1; \dots; x_n + \cdots + y_n)\rVert^2 = \left(\sqrt{(x_1 + \cdots + y_1)^2 + \cdots + (x_n + \cdots + y_n)^2}\right)^2$$
$$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = (x_1 + \cdots + y_1)^2 + \cdots + (x_n + \cdots + y_n)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + \cdots + x_n^2 + y_n^2 + 2x_ny_n$$
$$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + \cdots + y_n^2) + 2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) = \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$$

(ii) L'inégalité de Cauchy-Schwarz se déduit de la loi des cosinus, moyennant une petite astuce classique :

Soit $t \in \mathbb{R}$, d'après la loi des cosinus $\lVert\vec{u}+t\vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 + t^2\lVert\vec{v}\rVert^2 + 2t\vec{u}.\vec{v}$.
Ce qui correspond donc à une fonction polynomiale, i.e. $\lVert\vec{v}\rVert^2t^2 + (2\vec{u}.\vec{v})t + \lVert\vec{u}\rVert^2$ dont le discriminant vaut $\Delta = (2\vec{u}.\vec{v})^2 - 4\lVert\vec{v}\rVert^2\lVert\vec{u}\rVert^2$.
Or, on a nécessairement $\lVert\vec{u}+t\vec{v}\rVert^2 \geq 0$ et même $\lVert\vec{u}+t\vec{v}\rVert^2 > 0$ puis $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
La fonction polynomiale n'a donc aucune racine, c'est-à-dire :
$\Delta = (2\vec{u}.\vec{v})^2 - 4\lVert\vec{v}\rVert^2\lVert\vec{u}\rVert^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2\vec{u}.\vec{v})^2 \leq 4\lVert\vec{v}\rVert^2\lVert\vec{u}\rVert^2 \Leftrightarrow (\vec{u}.\vec{v})^2 \leq (\lVert\vec{v}\rVert\lVert\vec{u}\rVert)^2$.
Ce équivaut finalement à $-\lVert\vec{v}\rVert\lVert\vec{u}\rVert \leq \vec{u}.\vec{v} \leq \lVert\vec{v}\rVert\lVert\vec{u}\rVert$ et donc $\lvert\vec{u}.\vec{v}\rvert \leq \lVert\vec{v}\rVert\lVert\vec{u}\rVert$.

(iii) L'inégalité triangulaire traduit le fait que « le plus court chemin est la ligne droite ».

D'après la loi des cosinus $\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$. On déduit alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 \leq \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 + 2\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert = (\lVert\vec{u}\rVert + \lVert\vec{v}\rVert)^2$ ce qui revient à dire que $\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert \leq \lVert\vec{u}\rVert + \lVert\vec{v}\rVert$.

Remarque : toute norme doit en outre vérifier l'inégalité triangulaire.